

MÔN LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ

Giảng viên: ThS. Mai Chiém Tuấn

CHƯƠNG 7

BÀI TOÁN ĐƯỜNG ĐI NGẮN NHẤT

Chương VII: BÀI TOÁN ĐƯỜNG ĐI NGẮN NHẤT



1

VII.1 Các khái niệm

2

VII.2 Thuật toán Dijkstra

3

VII.3 Thuật toán Floyd

4

VII.4 Bài tập

VII.1 Các khái niệm

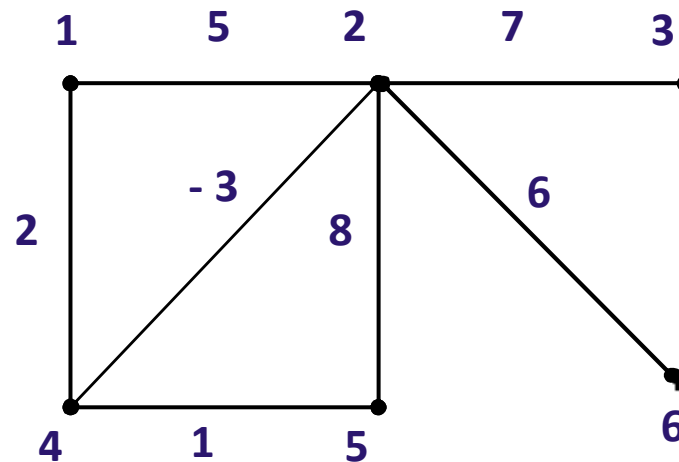


- ❖ **Đường đi ngắn nhất:** Giả sử có nhiều đường đi từ v_0 đến v_p : Đường đi ngắn nhất là đường đi có tổng trọng số các cung nhỏ nhất.
- ❖ **Bài toán:** Cho $G = \langle V, E \rangle$ là đồ thị có trọng số. s và t là 2 đỉnh của đồ thị. Hãy tìm đường đi có tổng trọng số nhỏ nhất từ s đến t .

VII.1 Các khái niệm



❖ Ví dụ 7.1:

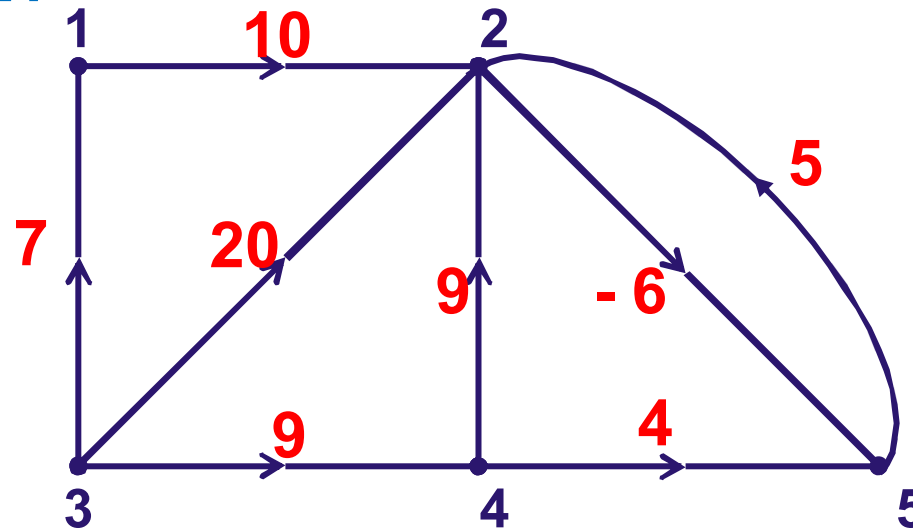


- ❖ Đường ngắn nhất đi từ đỉnh 1 đến đỉnh 5 ?
- ❖ Đường ngắn nhất đi từ đỉnh 1 đến đỉnh 6 ?

VII.1 Các khái niệm



❖ Ví dụ 7.2:



❖ **Tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh 3 đến đỉnh 5**

- Trả lời: $3 - 1 - 2 - 5$??? Độ dài 11 là ngắn nhất ???
- Đường đi này thì sao? Độ dài là bao nhiêu?

$$3 - 1 - 2 - 5 - 2 - 5$$

- Đường đi trên đã ngắn nhất chưa ???

VII.1 Các khái niệm



❖ Điều kiện để bài toán có lời giải:

- Phải tồn tại đường đi từ s đến t :
 - Đồ thị vô hướng liên thông
 - Đồ thị có hướng liên thông mạnh
 - Đồ thị vô hướng, s và t nằm trong cùng một thành phần liên thông
 - Đồ thị có hướng, có tồn tại đường đi từ s đến t
- Trong đồ thị không tồn tại chu trình âm
 - Đồ thị có hướng: không tồn tại chu trình âm.
 - Đồ thị vô hướng: không tồn tại cạnh âm.

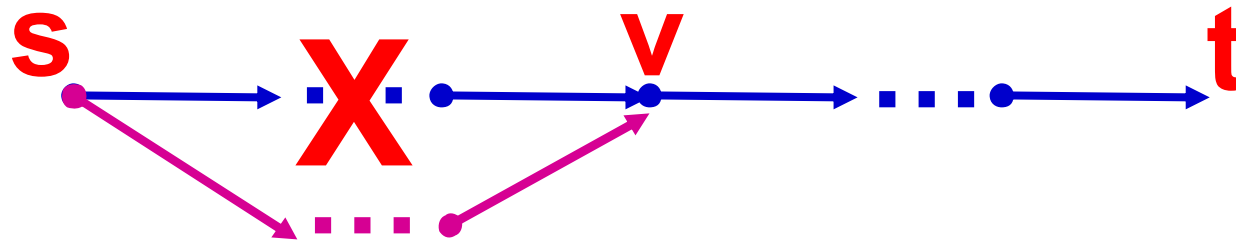
VII.1 Các khái niệm



❖ Đường đi ngắn nhất xuất phát từ 1 đỉnh

❖ Nhận xét:

- Nếu v là đỉnh trung gian trên đường đi ngắn nhất từ s đến t thì đường đi từ s đến v phải là ngắn nhất và đường đi từ v đến t cũng phải là ngắn nhất.



- Do đó, để tối ưu, người ta mở rộng bài toán **tìm đường đi ngắn nhất từ một đỉnh đến tất cả các đỉnh còn lại** của đồ thị.

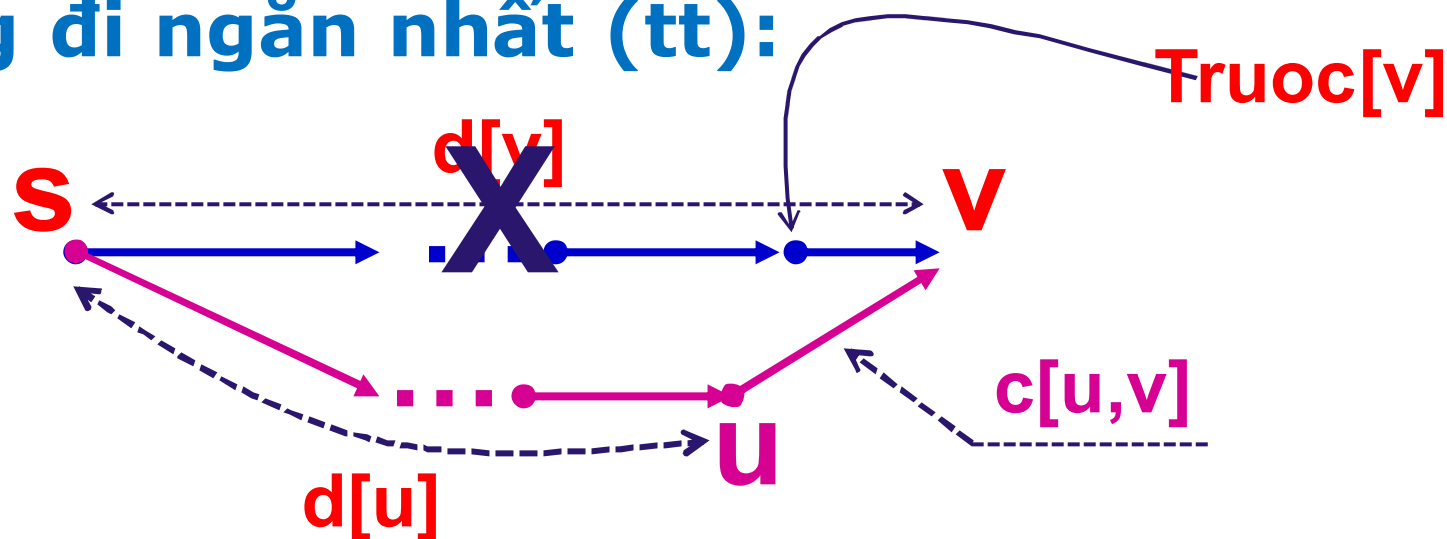
VII.1 Các khái niệm



- ❖ **Đường đi ngắn nhất xuất phát từ 1 đỉnh**
- ❖ **Ý tưởng chung của các thuật toán tìm đường đi ngắn nhất.**
 - Dò tìm bằng cách thử đi qua các đỉnh trung gian
 - Nếu phát hiện đường đi qua đỉnh trung gian ngắn hơn đường đi hiện tại thì sẽ cập nhật đường đi mới, đồng thời chỉnh sửa các thông tin liên quan.
 - Sử dụng hai mảng để lưu trữ tạm thời:
 - Mảng $d[v]$: Lưu trữ độ dài đường đi ngắn nhất hiện tại từ s đến v .
 - Mảng $T[v]$: Lưu trữ đỉnh nằm trước v trên đường đi ngắn nhất hiện tại.



- ❖ Đường đi ngắn nhất xuất phát từ 1 đỉnh
- ❖ Ý tưởng chung của các thuật toán tìm đường đi ngắn nhất (tt):



```
if  $d[v] > d[u] + c[u,v]$  then  
{  
     $d[v] = d[u] + c[u,v];$   
     $Truoc[v] = u;$  }  
}
```

VII.2 Thuật toán Dijkstra



❖ Ý tưởng:

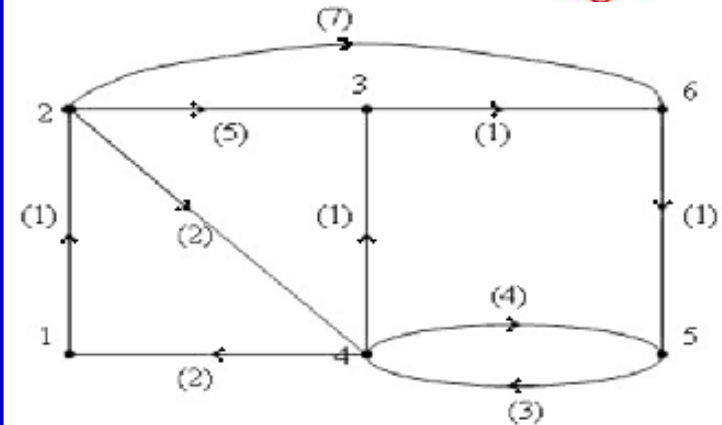
- Do không có cạnh âm nên tại mỗi bước, sẽ có một đỉnh mà thông tin về nó sẽ không thay đổi về sau
- Tại mỗi bước, ta không cần phải kiểm tra qua tất cả các đỉnh trung gian, mà chỉ thực hiện như sau:
 - Chọn một đỉnh u có giá trị $d[u]$ nhỏ nhất
 - Chọn u làm đỉnh trung gian để xác định các bước kế tiếp

❖ Chú ý: thuật toán này chỉ dùng cho đồ thị không có cạnh âm.

VII.2 Thuật toán Dijkstra

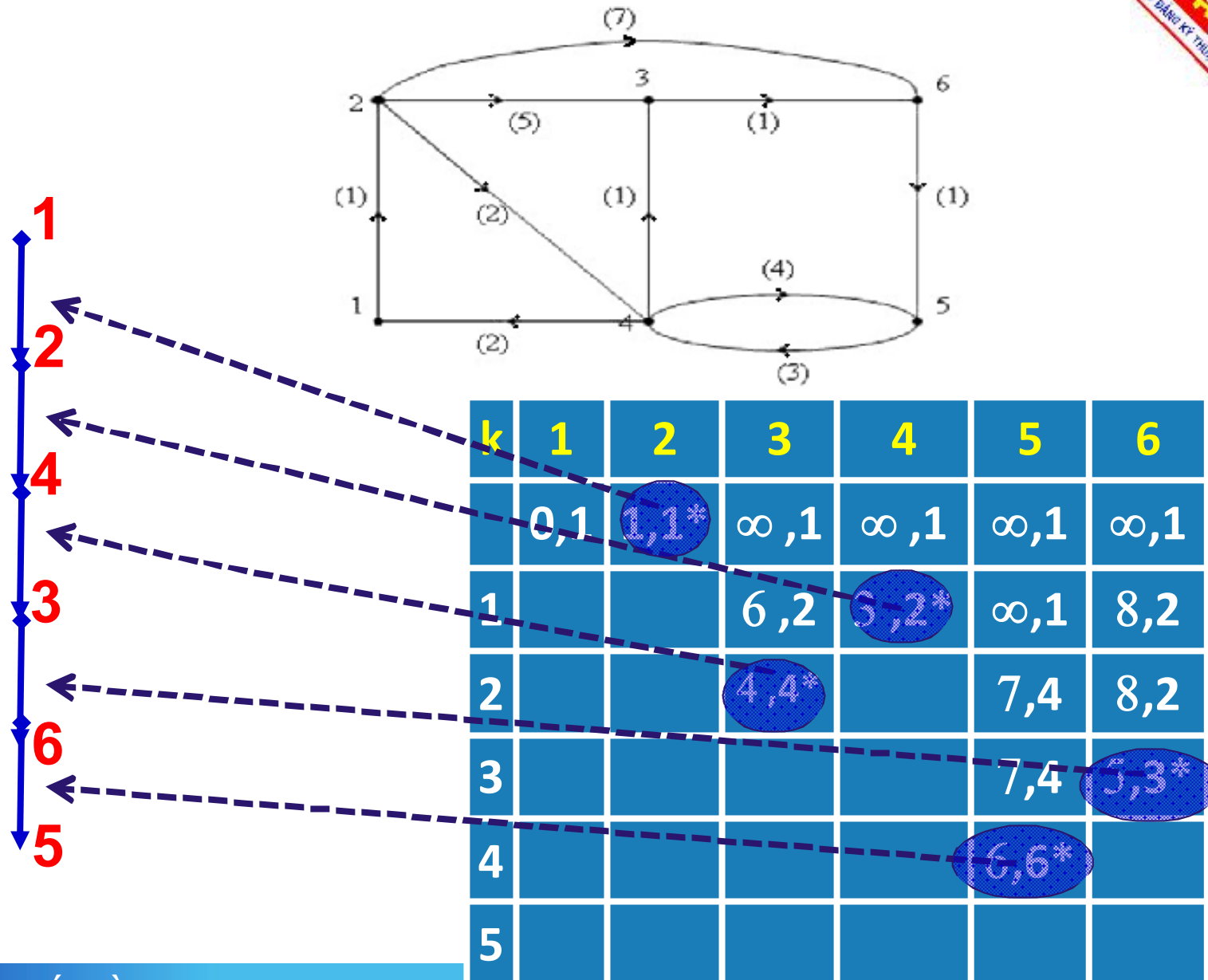


```
(* Khởi tạo *)
for v ∈ V do
  Begin
    d[v]:=a[s,v];
    Truoc[v]:=s;
  End;
d[s]:=0; T:=V\{s} ; (* T là tập các đỉnh chưa cố định *)
(* Bước lặp *)
while T ≠ ∅ do
  Begin
    Tìm đỉnh u ∈ T thỏa mãn d[u]=min{d[v] | v ∈ T}
    T:=T\{u} ; (* Cố định nhãn của đỉnh u *)
    For v ∈ T do
      If d[v]>d[u]+a[u,v] then
        Begin
          d[v]:=d[u]+a[u,v];
          Truoc[v]:=u;
        End;
      End;
    End;
  End;
```



k	1	2	3	4	5	6
0						
1						
2						
3						
4						

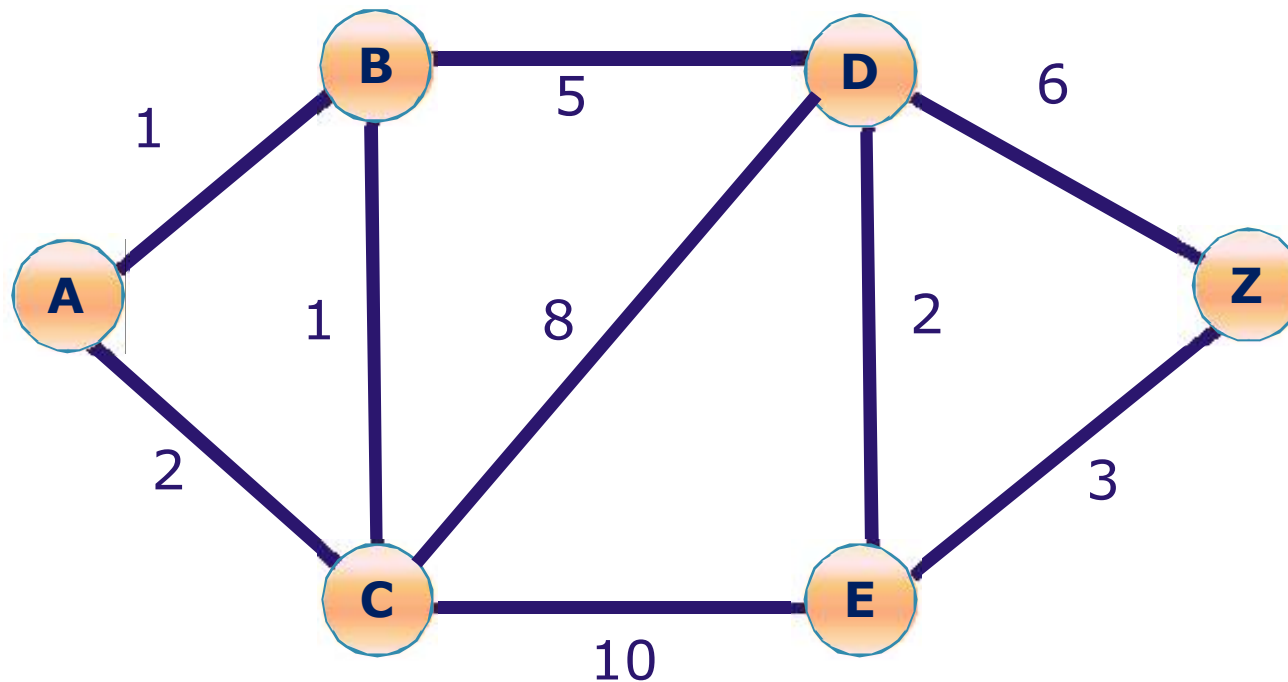
VII.2 Thuật toán Dijkstra



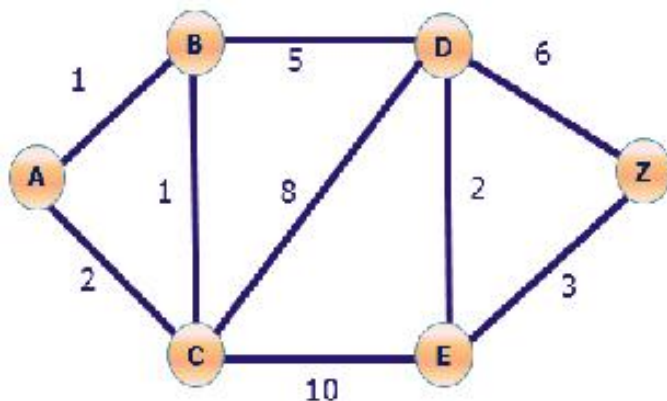
VII.2 Thuật toán Dijkstra



❖ **Ví dụ 7.2:** Tìm đường đi ngắn nhất từ A đến các đỉnh khác của đồ thị G sau:

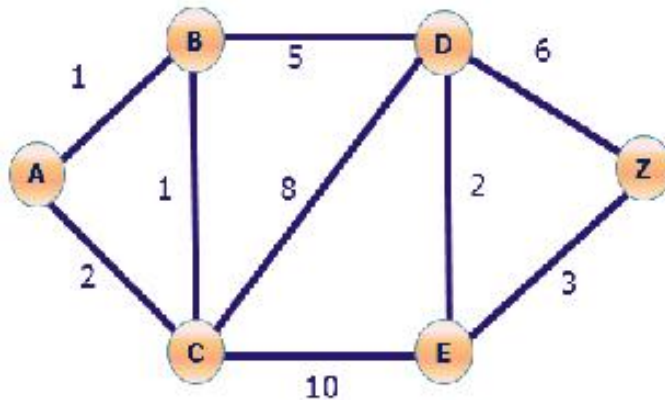


VII.2 Thuật toán Dijkstra



Bước	A	B	C	D	E	Z

VII.2 Thuật toán Dijkstra

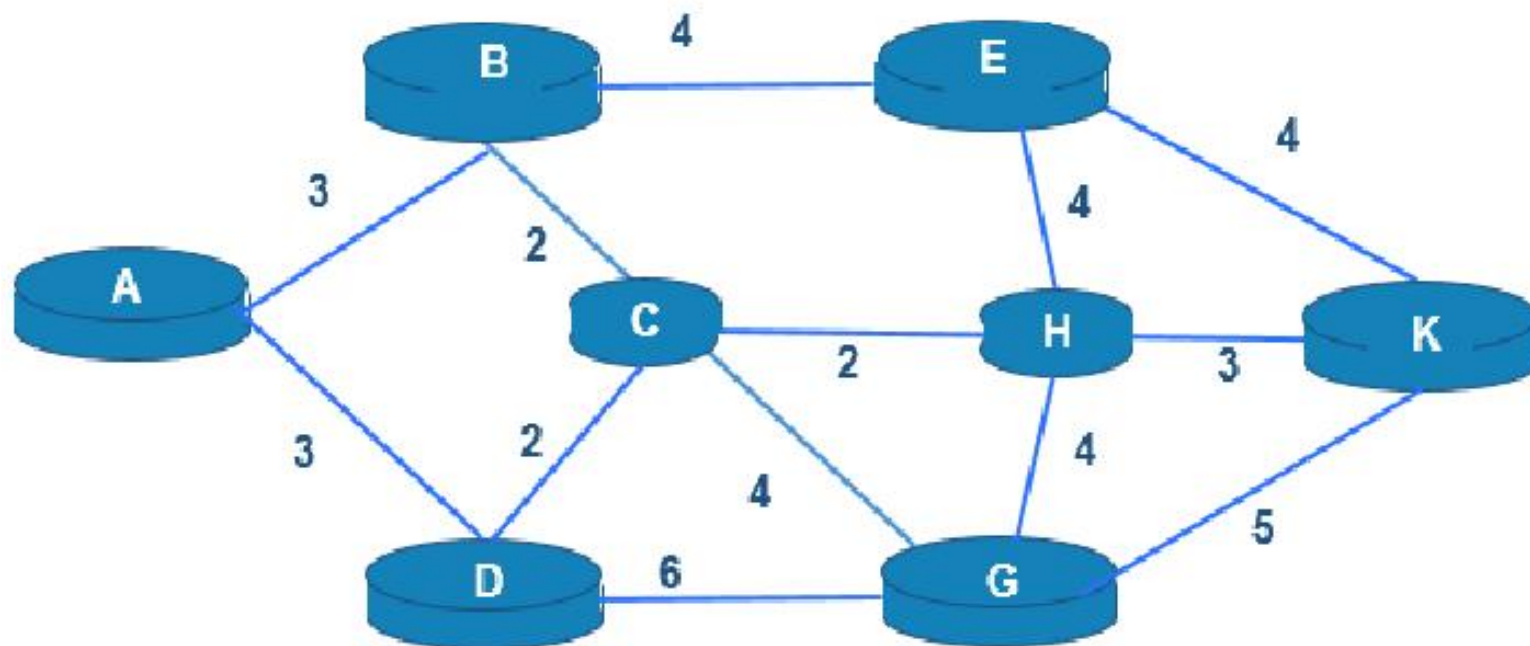


Bước	A	B	C	D	E	Z
Khởi tạo	$[0, A]$	$[1, A]^*$	$[2, A]$	$[\infty, A]$	$[\infty, A]$	$[\infty, A]$
1	-	-	$[2, A]^*$	$[6, B]$	$[\infty, A]$	$[\infty, A]$
2	-	-	-	$[6, B]^*$	$[12, C]$	$[\infty, A]$
3	-	-	-	-	$[8, D]^*$	$[12, D]$
4	-	-	-	-	-	$[11, E]^*$
5						

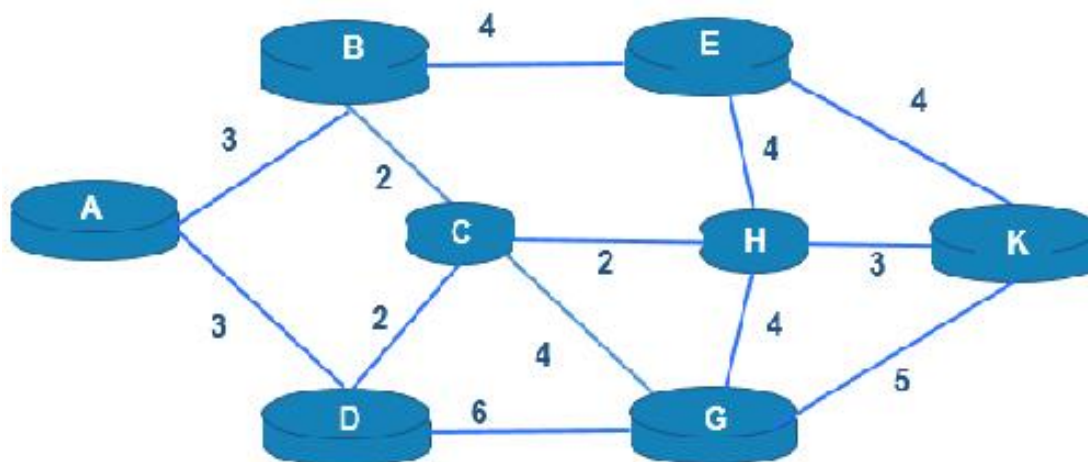
VII.2 Thuật toán Dijkstra



❖ **Ví dụ 7.3:** Cho đồ thị có trọng số $G = (V, E)$, tìm đường đi ngắn nhất giữa A và H.



VII.2 Thuật toán Dijkstra



Bước	A	B	C	D	E	H	G	K
Khởi tạo								
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								

VII.3 Thuật toán Floyd



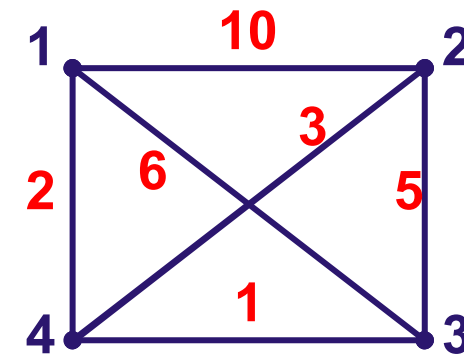
❖ **Tìm đường đi ngắn nhất giữa tất cả các cặp đỉnh.**

- **Đầu vào:** Đồ thị cho bởi trọng số $a[i,j]$, $i,j=1,2,\dots,n$.
- **Đầu ra:**
 - Ma trận đường đi ngắn nhất giữa tất cả các cặp đỉnh. $d[i,j]$, $i,j=1,2,\dots,n$. Trong đó $d[i,j]$ lưu độ dài ngắn nhất từ i đến j .
 - Ma trận ghi nhận đường đi $p[i,j]$, $i,j=1,2,\dots,n$. Trong đó $p[i,j]$ lưu đỉnh đi trước đỉnh j trong đường đi từ i đến j .

VII.3 Thuật toán Floyd



```
// Khởi tạo
For i:=1 to n do
  For j:=1 to n do
    { d[i,j] := a[i,j];
      p[i,j] := i;
    }
// Bước lặp
For k:=1 to n do
  For i:=1 to n do
    For j:=1 to n do
      If (d[i,j] > d[i,k] + d[k,j])
      { d[i,j] := d[i,k] + d[k,j];
        p[i,j] := p[k,j];
      }
    }
```


$$\begin{bmatrix} \infty & 10 & 6 & 2 \\ 10 & \infty & 5 & 3 \\ 6 & 5 & \infty & 1 \\ 2 & 3 & 1 & \infty \end{bmatrix}$$

Ma trận d

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Ma trận p

VII.3 Thuật toán Floyd



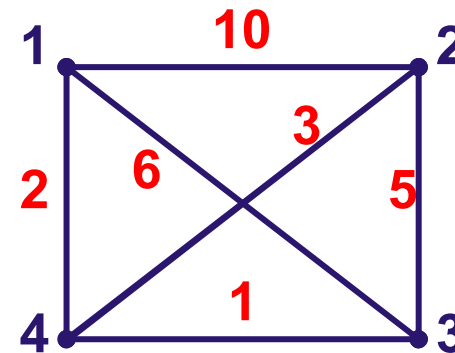
Khởi
tạo

$$\begin{bmatrix} \infty & 10 & 6 & 2 \\ 10 & \infty & 5 & 3 \\ 6 & 5 & \infty & 1 \\ 2 & 3 & 1 & \infty \end{bmatrix}$$

Ma trận d

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Ma trận p



k=1

$$\begin{bmatrix} \infty & 10 & 6 & 2 \\ 10 & \infty & 5 & 3 \\ 6 & 5 & \infty & 1 \\ 2 & 3 & 1 & \infty \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

k=3

$$\begin{bmatrix} \infty & 10 & 6 & 2 \\ 10 & \infty & 5 & 3 \\ 6 & 5 & \infty & 1 \\ 2 & 3 & 1 & \infty \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

k=2

$$\begin{bmatrix} \infty & 10 & 6 & 2 \\ 10 & \infty & 5 & 3 \\ 6 & 5 & \infty & 1 \\ 2 & 3 & 1 & \infty \end{bmatrix}$$

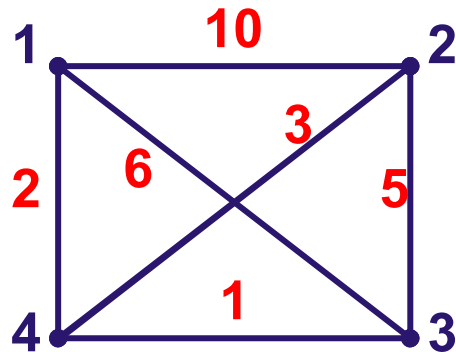
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

k=4

$$\begin{bmatrix} \infty & 5 & 3 & 2 \\ 5 & \infty & 4 & 3 \\ 3 & 4 & \infty & 1 \\ 2 & 3 & 1 & \infty \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

VII.3 Thuật toán Floyd


$$\begin{bmatrix} \infty & 5 & 3 & 2 \\ 5 & \infty & 4 & 3 \\ 3 & 4 & \infty & 1 \\ 2 & 3 & 1 & \infty \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

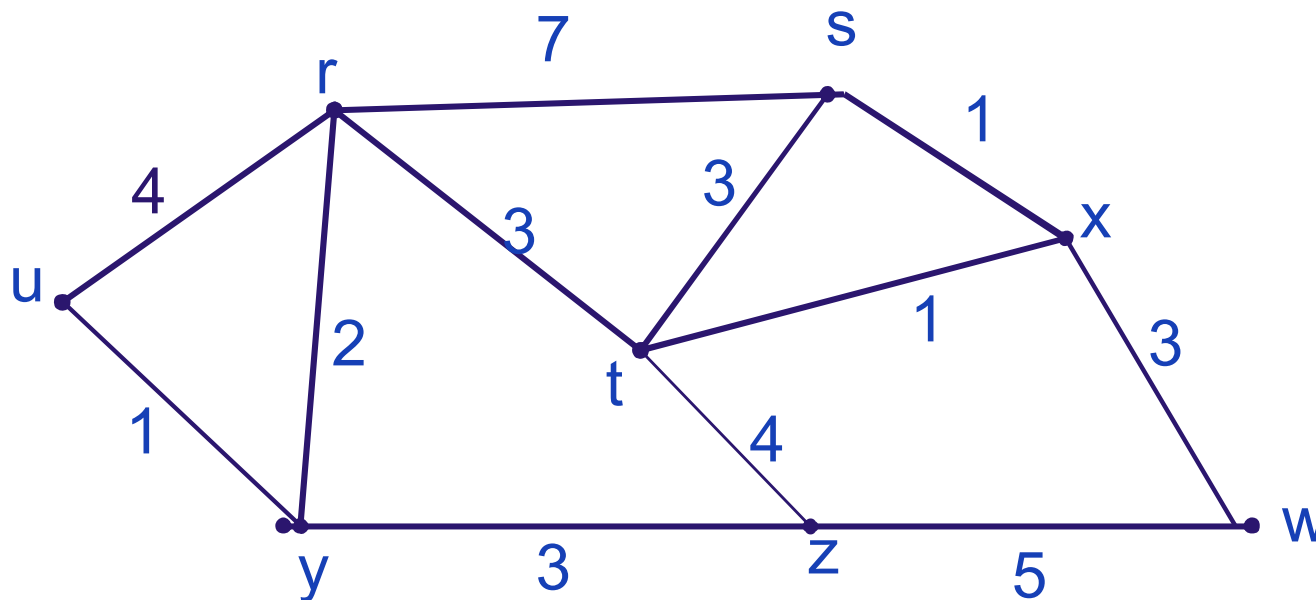
❖ Đọc đường đi:

- Từ 1 đến 3:
 - Trước 3 là $p[1,3] = 4$. Vậy 4 là đỉnh nằm trước 3 trên đường đi này.
 - Trước 4 là $p[1,4] = 1$. Vậy 1 là đỉnh nằm trước 4 trên đường đi này.
 - Dừng. Đường đi là: 1 – 4 – 3 với độ dài là $d[1,3] = 3$
- Tương tự, đường đi ngắn nhất từ 3 đến 2 là:
 - Trước 2 là $p[3,2] = 4$. Vậy 4 là đỉnh nằm trước 2 trên đường đi này.
 - Trước 4 là $p[3,4] = 3$. Vậy 3 là đỉnh nằm trước 4 trên đường đi này.
 - Dừng. Đường đi là: 3 – 4 – 2 với độ dài là $d[3,2] = 4$

VII.4 Bài tập



1. Tìm đường đi ngắn nhất từ u đến các đỉnh còn lại bằng thuật toán Dijkstra. Đồ thị được cho như hình sau:



VII.4 Bài tập



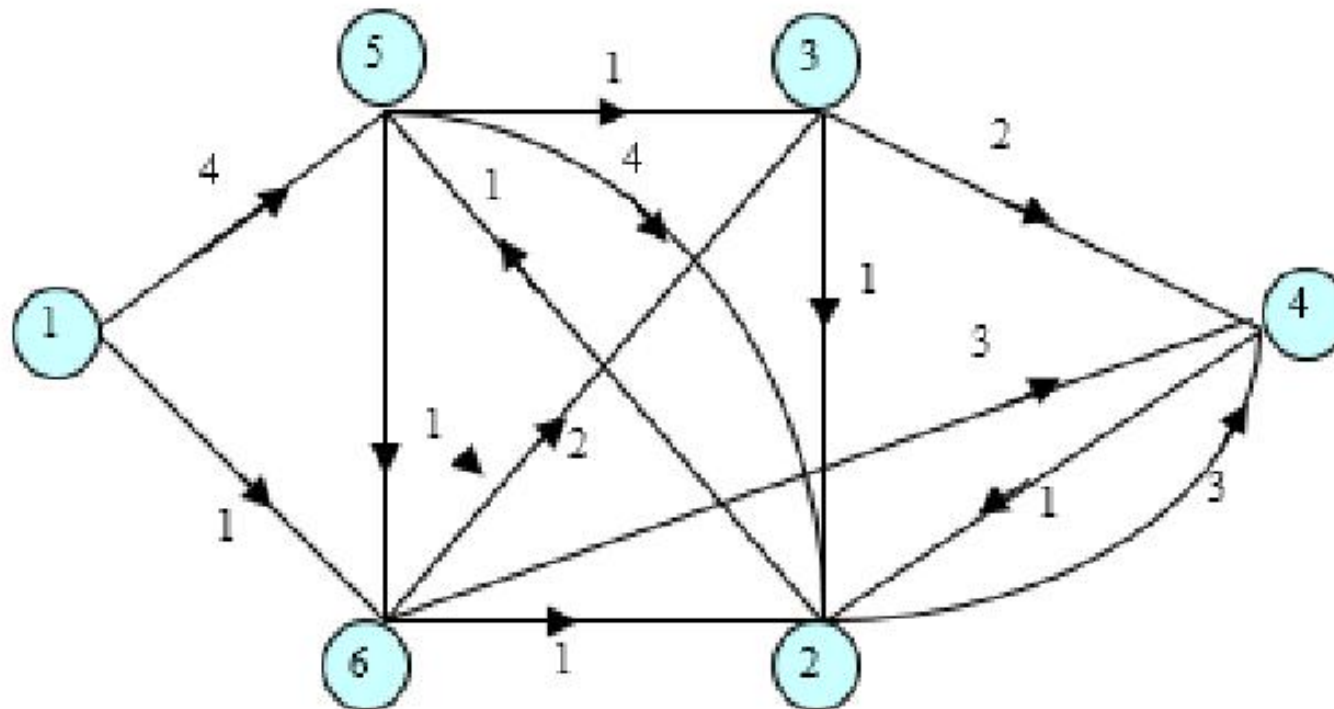
3. Dùng thuật toán Dijkstra để tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh A đến đỉnh G của đồ thị cho bởi ma trận trọng số như sau:

	A	B	C	D	E	F	G
A	0	5	31	40	∞	∞	∞
B	∞	0	27	∞	73	∞	∞
C	∞	26	0	8	49	25	38
D	∞	∞	∞	0	∞	16	∞
E	∞	70	∞	∞	0	∞	9
F	∞	∞	∞	∞	23	0	12
G	∞	∞	∞	∞	10	∞	0

VII.4 Bài tập



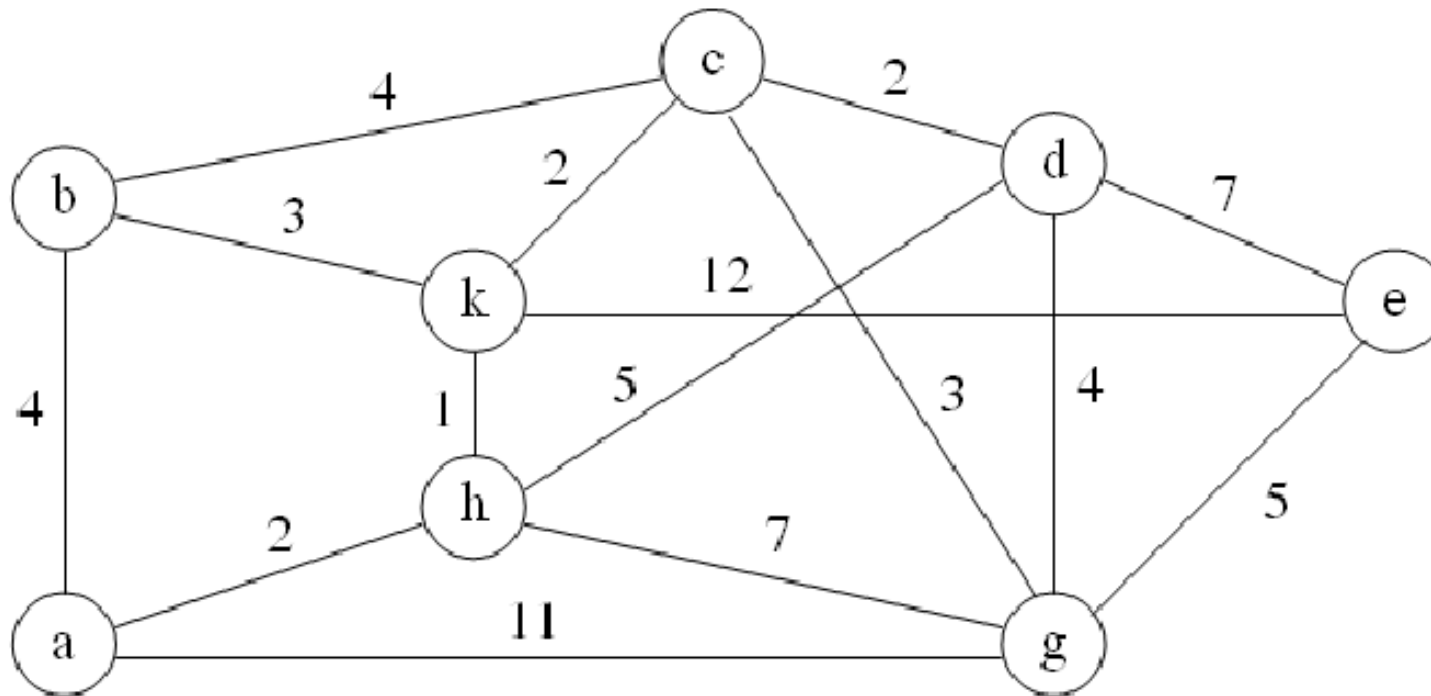
4. Tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh 1 đến các đỉnh còn lại bằng thuật toán Dijkstra. Đồ thị được cho như hình sau:



VII.4 Bài tập



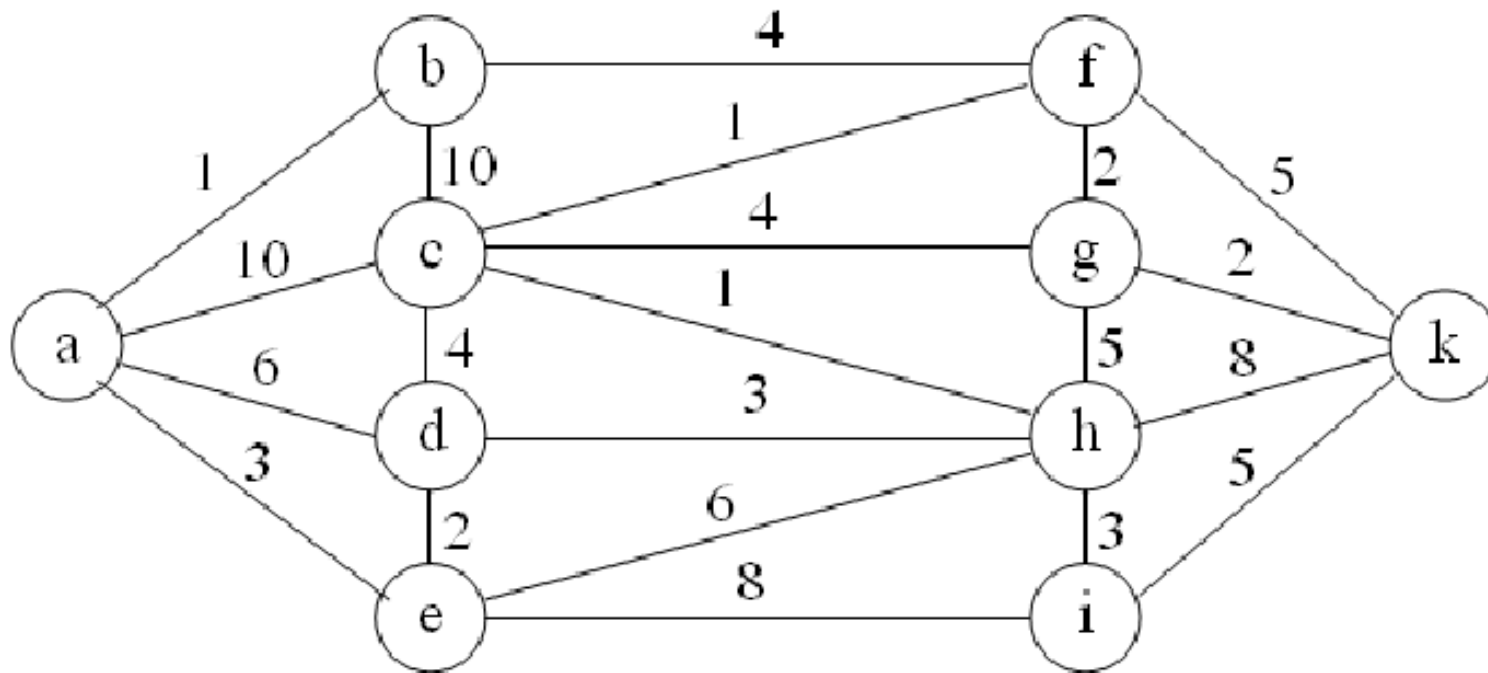
5. Tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh **a** đến các đỉnh còn lại bằng thuật toán Dijkstra. Đồ thị được cho như hình sau:



VII.4 Bài tập



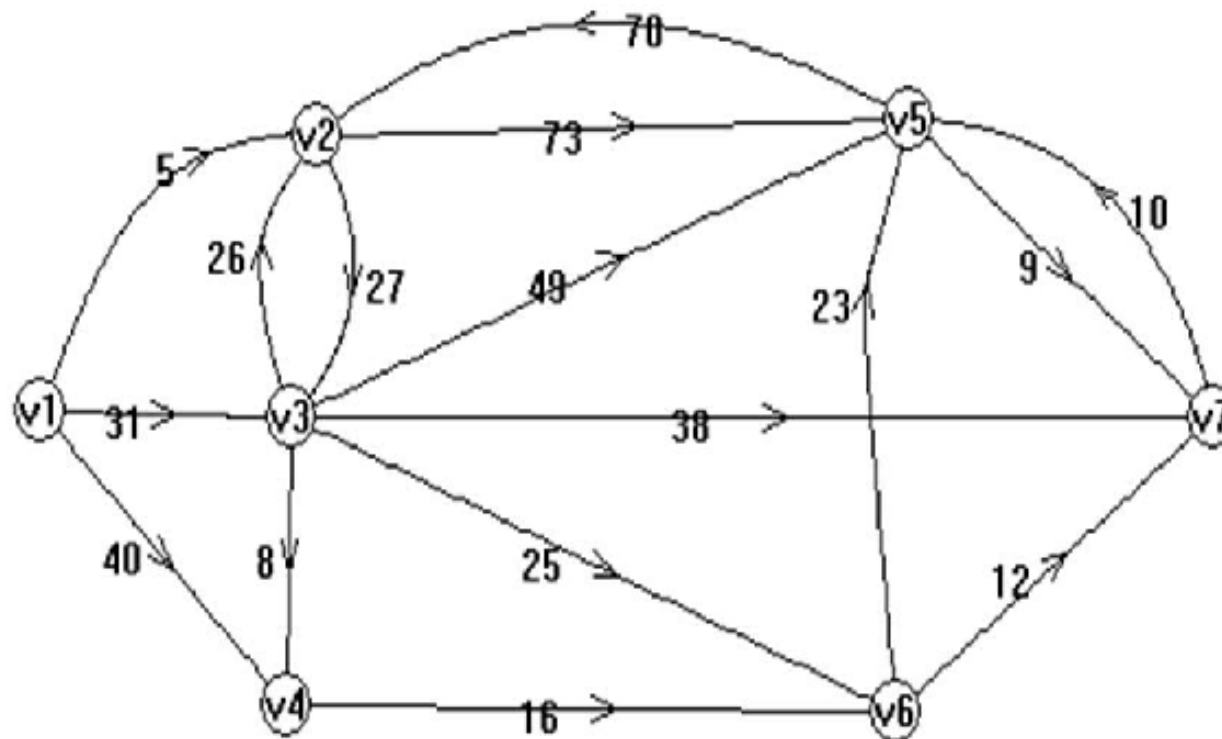
6. Tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh **a** đến các đỉnh còn lại bằng thuật toán Dijkstra. Đồ thị được cho như hình sau:



VII.4 Bài tập



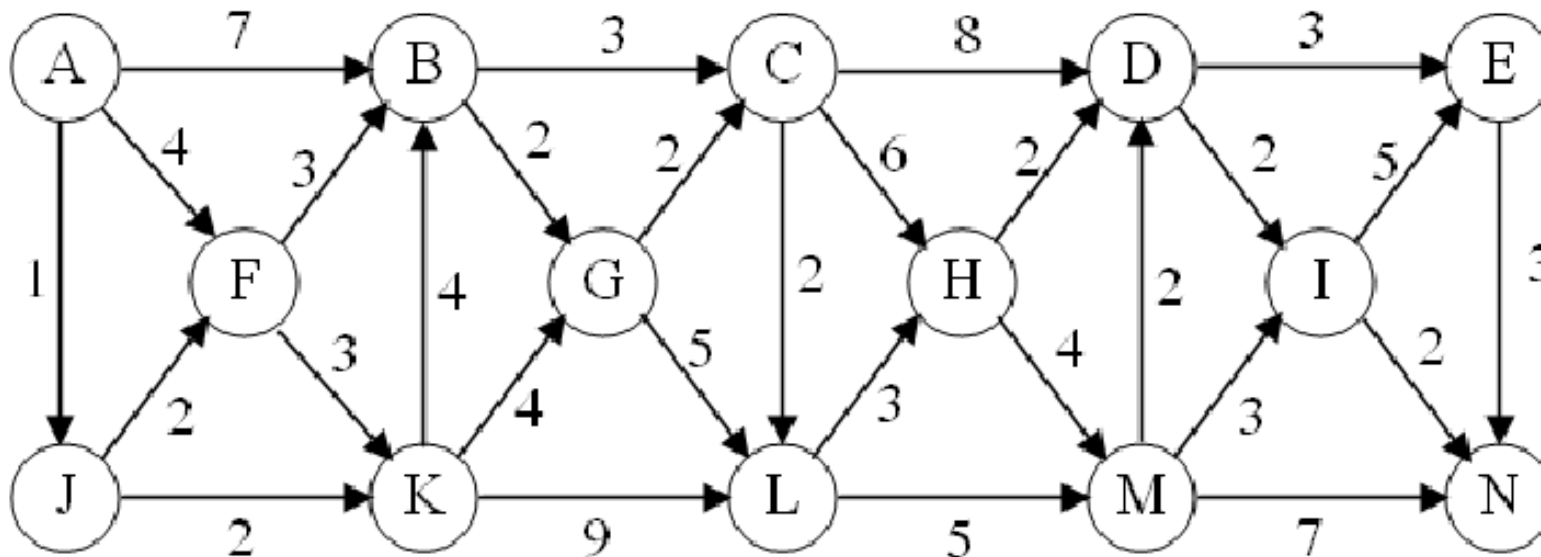
7. Tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh **V₁** đến các đỉnh còn lại bằng thuật toán Dijkstra. Đồ thị được cho như hình sau:



VII.4 Bài tập



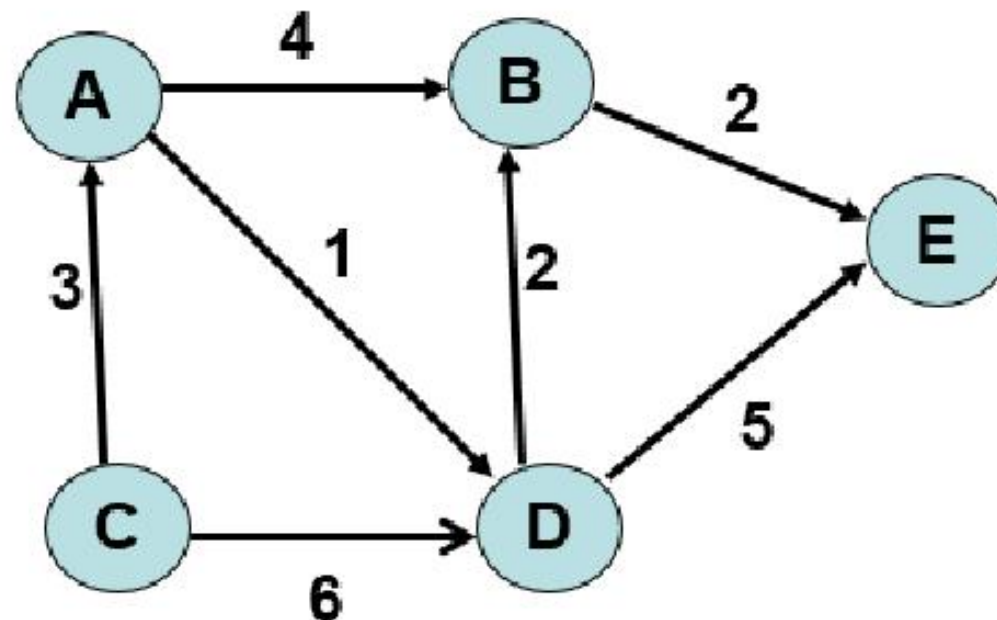
8. Tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh **A** đến các đỉnh còn lại bằng thuật toán Dijkstra. Đồ thị được cho như hình sau:



VII.4 Bài tập



9. Dùng Thuật toán Floyd tìm đường đi ngắn nhất giữa tất cả cặp đỉnh của đồ thị sau:



Q & A?